

경영·경제분석을 위한 핵심 수학(6판)

연습문제 풀이 이용 안내

- 본 문제 풀이의 저작권은 원서 저작권자(Knut Sydsæter, Arne Strøm, Peter Hammond, Andrés Carvajal)와 Pearson, 한빛아카데미(주)에 있습니다.
- 이 자료를 무단으로 전제하거나 배포할 경우 저작권법 136조에 의거하여 최고 5년 이하의 징역 또는 5천만원 이하의 벌금에 처할 수 있고 이를 병과(併科)할 수도 있습니다.

CHAPTER 15 편도함수의 활용

15.1 간단한 연쇄법칙

1.

(a) $\frac{dz}{dt} = 2t + 6t^5$

(b) $\frac{dz}{dt} = a^p b^q (p+q)t^{p+q-1}$

2.

(a) $\frac{dz}{dt} = \ln(\ln t) + \frac{\ln t}{t+1} + \frac{t+1}{t \ln t} + \frac{\ln(t+1)}{t}$

(b) $\frac{dz}{dt} = a + b$

3.

$$\frac{dz}{dt} = F'_1(t, y) + F'_2(t, y)g'(t)$$

$$\frac{dz}{dt} = 2t(1 + e^{t^2} + t^2 e^{t^2})$$

4.

$$\frac{dY}{dL} = F'_K(K, L)g'(L) + F'_L(K, L)$$

5.

$$\frac{dY}{dt} = 35 - 7\sqrt{5}$$

6.

생략

7.

$$x^* = \sqrt[4]{\frac{3b}{a}}$$

8.

증명 생략

9.

(a) $f'_1(0, 0) = 0, f'_2(0, 0) = 1$

(b) $z'(0) = \frac{b^3}{a^2 + b^2}$

(c) 증명 생략

(d) 증명 생략

CHAPTER 15 편도함수의 활용

15.2 다변수함수에 대한 연쇄법칙

1.

$$(a) \frac{\partial z}{\partial t} = 1 + 2ts^2, \quad \frac{\partial z}{\partial s} = -1 + 2t^2s$$

$$(b) \frac{\partial z}{\partial t} = 8t^3 - 8ts + 9t^2 + 36ts^3 + 36s^6, \quad \frac{\partial z}{\partial s} = -4t^2 + 4s + 54t^{2s^2} + 216ts^5 + 216s^8$$

2.

$$(a) \frac{\partial z}{\partial t} = 5t^4s^2 + 4t^3s^4, \quad \frac{\partial z}{\partial s} = 2t^5s + 4t^4s^3$$

$$(b) \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{2(1-s)e^{ts+t+s}}{(e^{t+s} + e^{ts})^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{2(1-t)e^{ts+t+s}}{(e^{t+s} + e^{ts})^2}$$

3.

$$\frac{\partial z}{\partial r} = 2r \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial w}, \quad \frac{\partial z}{\partial s} = -4s \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{1}{s} \frac{\partial F}{\partial w}$$

4.

$$\frac{\partial z}{\partial t_1} = F'(x)g'_1(t_1, t_2), \quad \frac{\partial z}{\partial t_2} = F'(x)g'_2(t_1, t_2)$$

5.

$$\frac{\partial x}{\partial s} = F'_1 + F'_2g'(s) + F'_3h'_1(s, t), \quad \frac{\partial x}{\partial t} = F'_3h'_2(s, t)$$

6.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = F'_1f'_1(x, y) + F'_22xh(y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = F'_1f'_2(x, y) + F'_2x^2h'(y) + F'_3\left(-\frac{1}{y^2}\right)$$

7.

$$(a) \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = 5s^2t^4$$

$$(b) \frac{\partial w}{\partial t} = 1 + 2se^{2ts}$$

8.

$$(a) \frac{dz}{dt} = F'_1(t, t^2, t^3) + F'_2(t, t^2, t^3)2t + F'_3(t, t^2, t^3)3t^2$$

$$(b) \frac{dz}{dt} = F'_1(t, f(t), g(t^2)) + F'_2(t, f(t), g(t^2))f'(t) + F'_3(t, f(t), g(t^2))g'(t^2)2t$$

9.

$$\frac{dZ}{dG} = 1 + 2Y \frac{\partial Y}{\partial G} + 2r \frac{\partial r}{\partial G}$$

10.

$$\frac{dZ}{dG} = 1 + I'_1(Y, r) \frac{\partial Y}{\partial G} + I'_2(Y, r) \frac{\partial r}{\partial G}$$

11.

$$\frac{\partial C}{\partial p_1} = -\alpha_1 A(a + 2cAp_1^{-\alpha_1}p_2^{\beta_1})p_1^{-\alpha_1-1}p_2^{\beta_1} + \alpha_2 bBp_1^{\alpha_2-1}p_2^{-\beta_2}, \quad \frac{\partial C}{\partial p_2} = \beta_1 A(a + 2cAp_1^{-\alpha_1}p_2^{\beta_1})p_1^{-\alpha_1}p_2^{\beta_1-1} - \beta_2 bBp_1^{\alpha_2}p_2^{-\beta_2-1}$$

CHAPTER 15 편도함수의 활용

12.

증명 생략

13.

증명 생략

14.

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial r}$$

15.

28

CHAPTER 15 편도함수의 활용

15.3 등위선을 따른 음함수미분법

1.

$$y' = -\frac{F'_1}{F'_2} = -\frac{2x+3y}{3x+y}$$

2.

(a) $y' = -\frac{2y}{x}, y'' = \frac{6y}{x^2}$

(b) 7.3절 [연습문제 5] 참고

(c) 7.3절 [연습문제 5] 참고

3.

(a) $y' = -4, y'' = -14, y = -4x + 8$

(b) $a = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ 일 때 점 $(a, -4a)$ 와 $(-a, 4a)$

4.

$$h'(1) = -1$$

5.

$$\frac{dP}{dr} < 0$$

6.

$$\frac{dP}{dR} > 0$$

7.

증명 생략

CHAPTER 15 편도함수의 활용

15.4 등위면

1.

$$(a) \frac{\partial z}{\partial x} = 3$$

$$(b) \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz + z^3 - y^2z^5}{xy + 3xz^2 - 5xy^2z^4}$$

$$(c) \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z}{x}$$

2.

$$z'_x = \frac{x^2}{1-z^2}, z'_y = \frac{y^2}{1-z^2}, z''_{xy} = \frac{2zx^2y^2}{(1-z^2)^3}$$

3.

$$(a) L^* = \frac{P^2}{4w^2}, \frac{\partial L^*}{\partial P} = \frac{P}{2w^2}, \frac{\partial L^*}{\partial w} = -\frac{P^2}{2w^3}$$

$$(b) \text{일계조건} : Pf'(L^*) - C_L(L^*, w) = 0$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial P} = -\frac{f'(L^*)}{Pf''(L^*) - C''_{LL}(L^*, w)}, \frac{\partial L^*}{\partial w} = \frac{C''_{Lw}(L^*, w)}{Pf''(L^*) - C''_{LL}(L^*, w)}$$

4.

$$z'_x = -\frac{yx^{y-1} + z^x \ln z}{y^z \ln y + xz^{x-1}}, z'_y = -\frac{xy \ln x + zy^{z-1}}{y^z \ln y + xz^{x-1}}$$

5.

$$P'_w = -\frac{g'_w(w, P)}{g'_p(w, P) - f'_p(R, P)} < 0 \quad (g'_w > 0, g'_P > 0, f'_P < 0)$$

6.

$$y = -2x + 5$$

7.

$$\frac{\partial y}{\partial K} = \frac{\alpha y}{K(1 + 2c \ln y)}, \frac{\partial y}{\partial L} = \frac{\beta y}{L(1 + 2c \ln y)}$$

CHAPTER 15 편도함수의 활용

15.5 대체탄력성

1.

$$\sigma_{yx} = -1$$

2.

$$(a) \quad R_{yx} = \left(\frac{y}{x}\right)^{1-a}$$

$$(b) \quad \sigma_{yx} = \frac{1}{1-a}$$

3.

풀이 생략

CHAPTER 15 편도함수의 활용

15.6 이변수동차함수

1.

증명 생략

2.

0.58

3.

증명 생략

4.

차수 0의 동차함수

증명 생략

5.

증명 생략

$$\frac{F(K,L)}{L} = A \left[a \left(\frac{K}{L} \right)^{-\rho} + b \right]^{-\frac{1}{\rho}}$$

6.

증명 생략

7.

증명 생략

8.

$f(6,9)=117$

9.

증명 생략

CHAPTER 15 편도함수의 활용

15.7 동차함수와 동조함수

1.

- (a) 차수 1의 동차함수
- (b) 동차함수가 아니다.
- (c) 차수 $-\frac{1}{2}$ 의 동차함수
- (d) 차수 1의 동차함수
- (e) 동차함수가 아니다.
- (f) 차수 n 의 동차함수

2.

- (a) 차수 1의 동차함수
- (b) 차수 μ 의 동차함수

3.

모두 차수 1의 동차함수

4.

증명 생략

5.

(a), (b), (d)

6.

- (a) 차수 mr 의 동차함수
- (b) 차수 sp 의 동차함수
- (c) $r = s$ 이면 차수 r 의 동차함수지만, $r \neq s$ 이면 동차함수가 아니다.
- (d) 차수 $r + s$ 의 동차함수
- (e) 차수 $r - s$ 의 동차함수

7.

증명 생략

CHAPTER 15 편도함수의 활용

15.8 선형근사

1.

(a) $f(x, y) \approx 1 + 5x + 6y$

(b) $f(x, y) \approx 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

(c) $f(x, y) \approx y$

2.

$$f(x, y) \approx Ax_0^a y_0^b \left\{ 1 + \frac{a(x - x_0)}{x_0} + \frac{b(y - y_0)}{y_0} \right\}$$

3.

증명 생략

4.

$f(0.98, -1.01) \approx -4.97$ 이고, 오차는 0.000614

5.

(a) $f(1.02, 1.99) = 1.1909$

(b) $f(1.02, 1.99) \approx 1.19$ 이므로 오차는 0.0009

6.

$$v(1.01, 0.02) \approx -1 - \frac{1}{150}$$

7.

(a) $z = 2x + 4y - 5$

(b) $z = -10x + 3y + 3$

8.

증명 생략

9.

증명 생략

10.

(a) ~ (d) 증명 생략

(e) 미분가능하지 않다.

CHAPTER 15 편도함수의 활용

15.9 미분

1.

$$dz = (y^2 + 3x^2)dx + 2xydy$$

2.

(a) $dz = 3x^2dx + 3y^2dy$

(b) $dz = ey^2(dx + 2xydy)$

(c) $dz = \frac{2x dx - 2y dy}{x^2 - y^2}$

3.

(a) $dz = 2xu dx + x^2(u'_x dx + u'_y dy)$

(b) $dz = 2u(u'_x dx + u'_y dy)$

(c) $dz = \frac{1}{xy + yu} [(y + yu'_x)dx + (x + u + yu'_y)dy]$

4.

$$T \approx 7.015714$$

5.

$$dU = \frac{\sqrt{y}}{e^U + Ue^U} dx + \frac{x}{2\sqrt{y}(e^U + Ue^U)} dy$$

6.

$$dX = A\beta N^{\beta-1}e^{\rho t}dN + AN^{\beta}\rho e^{\rho t}dt$$

7.

$$dX_1 = BEX^{E-1}N^{1-E}dX + B(1-E)X^EN^{-E}dN$$

8.

(a) $dU = 2a_1u_1du_1 + \cdots + 2a_nu_ndu_n$

(b) $dU = A(\delta_1u_1^{-\rho} + \cdots + \delta_nu_n^{-\rho})^{-1-1/\rho}(\delta_1u_1^{-\rho}du_1 + \cdots + \delta_nu_n^{-\rho}du_n)$

9.

$$\frac{dz}{z} = \frac{a_1}{x_1}dx_1 + \frac{a_2}{x_2}dx_2 + \cdots + \frac{a_n}{x_n}dx_n$$

10.

(a) $d^2z = 2dxdy + 2(dy)^2$

(b) 증명 생략

CHAPTER 15 편도함수의 활용

15.10 연립방정식

1.

(a) 2

(b) 3

(c) 1

2.

3

3.

풀이 생략

4.

풀이 생략

CHAPTER 15 편도함수의 활용

15.11 연립방정식의 미분

1.

$$a du + b dv = c ds + d dy, \quad e du + f dv = g dx + h dy$$

$$du = \frac{(cf - bg)dx + (df - bh)dy}{af - be}, \quad dv = \frac{(ag - ce)dx + (ah - de)dy}{af - be}$$

2.

$$(a) \quad du = \frac{-3u^4 - 1}{9xu^3 - 3v} dx + \frac{6yu}{9xu^3 - 3v} dy, \quad dv = \frac{3xu^2 + 3u^3v}{9xu^3 - 3v} dx - \frac{6yv}{9xu^3 - 3v} dy$$

$$(b) \quad u'_x = \frac{-3u^4 - 1}{9xu^3 - 3v}, \quad v'_x = \frac{3xu^2 + 3u^3v}{9xu^3 - 3v}$$

$$(c) \quad u'_x = \frac{283}{81}, \quad v'_x = -\frac{64}{27}$$

3.

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{3 - 27x_1^2 y_2^2}{1 + 54y_1^2 y_2^2}, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = \frac{3x_1^2 + 18y_1^2}{1 + 54y_1^2 y_2^2}$$

4.

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{I'(r)}{aI'(r) + L'(r)S'(Y)}, \quad \frac{\partial r}{\partial M} = \frac{S'(Y)}{aI'(r) + L'(r)S'(Y)}$$

5.

$$u''_{xx} = \frac{(u^2 - y^2)(4uv - 1)}{4y^2 v^3}$$

6.

$$(a) \quad dY = \frac{F'_T dT + dG + (F'_r + f'_r)dr}{1 - F'_Y - f'_Y}$$

(b) T 가 증가할 때 Y 는 감소한다.

$dT = dG$ 라면 $F'_T > -1$ 일 때 $dY > 0$ 이다.

7.

(a) 3

$$(b) \quad D = L'_r(C'_Y + F'_Y - 1) - L'_Y(C'_r + F'_r) \text{ 일 때 } dY = -\left(\frac{L'_r}{D}\right)d\alpha, \quad dr = \left(\frac{L'_Y}{D}\right)d\alpha, \quad dI = \left(\frac{F'_r L'_Y - F'_Y L'_r}{D}\right)d\alpha$$

8.

(a) 풀이 생략

$$(b) \quad \frac{dy}{dg} = -\frac{L'(r)S'_g}{D}, \quad \frac{dr}{dg} = \frac{\alpha P S'_g}{D}, \quad (\text{단, } D = L'(r)(S'_y - I'_y) - \alpha P(S'_r - I'_r))$$

9.

$$(a) \quad du = 2dy - \frac{4}{3}, \quad dv = -\frac{8}{3}dx + \frac{10}{3}dy, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{10}{3}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2$$

$$(b) \quad \Delta u \approx -0.93, \quad \Delta v \approx 0.4$$

10.

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{\lambda p_2^2 + x_1(p_2 U''_{12} - p_1 U''_{22})}{p_1^2 U''_{22} - 2p_1 p_2 U''_{12} + p_2^2 U''_{11}}$$

CHAPTER 15 편도함수의 활용

CHAPTER 15 복습문제

15.1

(a) $\frac{dz}{dt} = 24t + 243t^8$

(b) $\frac{dz}{dt} = pt^{p-1}(a^p + b^p)$

15.2

$$\frac{\partial z}{\partial t} = G'_1(u, v)\varphi'_1(t, s), \quad \frac{\partial z}{\partial s} = G'_1(u, v)\varphi'_2(t, s) + G'_2(u, v)\psi'(s)$$

15.3

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 4s^4t^3 + 3s^2 + 3t^2 - 6ts + 2s + 2t, \quad \frac{\partial w}{\partial s} = 4s^3t^4 - 3s^2 - 3t^2 + 6ts + 2s + 2t$$

15.4

$$u = \frac{\varphi(N)}{N} \text{ 이라 할 때, } \frac{dX}{dN} = g(u) + g'(u)(\varphi'(N) - u), \quad \frac{d^2X}{dN^2} = \left(\frac{1}{N}\right)g''(u)(\varphi'(N) - u)^2 + g'(u)\varphi''(N)$$

15.5

(a) $\frac{\dot{E}}{E} = -a\left(\frac{\dot{p}}{p}\right) + b\left(\frac{\dot{m}}{m}\right)$

(b) 생략

15.6

$$z'_{11} = \frac{1}{2}, \quad z''_{11} = \frac{11}{16e}$$

15.7

$$\sigma_{yx} = -1$$

15.8

(a) $R_{yx} = \frac{2y}{3x}$

(b) $R_{yx} = \frac{y}{x+1}$

(c) $R_{yx} = \left(\frac{y}{x}\right)^3$

15.9

(a) -1

(b) $2ac$

(c) 4

(d) 동차함수가 아니다.

15.10

$$\sigma_{yx} = \frac{1}{3}$$

15.11

$$\text{El}_x y = \frac{xy}{1-2y}$$

CHAPTER 15 편도함수의 활용

15.12

- (a) 차수 1의 동차함수
- (b) 차수 k 의 동차함수
- (c) 차수 0의 동차함수

15.13

증명 생략

15.14

증명 생략

15.15

$$u'_x = -e, u'_y = e, v'_x = 0, v'_y = -2e$$

15.16

$$(a) \frac{\partial p}{\partial w} = \frac{L}{F(L)}, \frac{\partial p}{\partial B} = \frac{1}{F(L)}, \frac{\partial L}{\partial w} = \frac{F(L) - LF'(L)}{pF(L)F''(L)}, \frac{\partial L}{\partial B} = -\frac{F'(L)}{pF(L)F''(L)}$$

- (b) 증명 생략

15.17

$$(a) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2^{-\beta}}{\alpha}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2^{-\beta}}{\alpha}, \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2^{\beta} - 2^{-\beta}}{\beta 2^{\beta-1}}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2^{-\beta} + 3}{\beta 2^{\beta-1}}$$

$$(b) u(0.99, 1.01) \approx 1 - \frac{2^{-\beta}}{50\alpha}$$

15.18

- (a) 증명 생략

$$(b) \frac{\partial T}{\partial g} = \frac{rS + 1 - rTe^{gT} - e^{-rT}}{rg(e^{gT} - e^{-rT})}$$

15.19

- (a) 증명 생략

- (b) 증명 생략

$$(c) \frac{\partial t^*}{\partial r} = \frac{V(t^*)}{V''(t^*) - rV'(t^*)}, \frac{\partial t^*}{\partial m} = \frac{1}{V''(t^*) - rV'(t^*)}$$